Μάθημα 2ο 07/10/16

$\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

Ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $\quad d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ αν
$d(T(x),T(y)) = d(x,y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

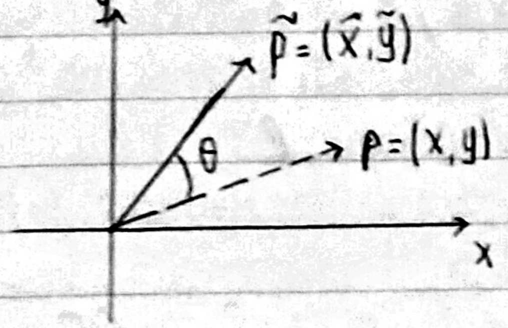
ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ γράφεται ως εξής $T = T_v \circ A$ όπου T_v είναι παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^n$ και $A \in O(n) = \{A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n / A$ ορθογ. μετασχηματισμός$\}$
$T_v(p) = p+v$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

1) Στροφές του $\mathbb{R}^2$

Για $\theta \in [0,2\pi)$ θεωρώ την γραμμική απεικόνιση $R_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ως προς τη βάση $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$

Προφανώς $K_\theta \in O(2) \subset Isom(\mathbb{R}^2)$



$R_\theta(p) = ;$

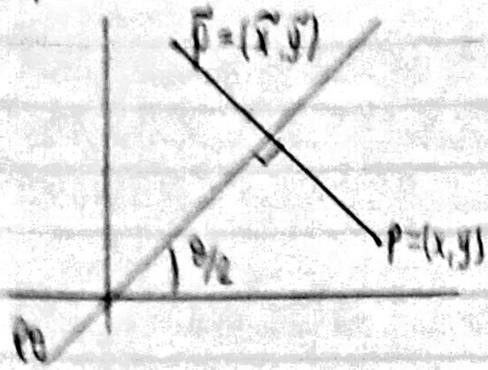
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Η R_θ καλείται στροφή κατά γωνία θ

Διατήρηση του προσανατολισμού $\det R_\theta = +1$

2) Για κάθε $\theta \in [0,2\pi)$ ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $K_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα
$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ ως προς $\{e_1, e_2\}$

Άρα $K_\theta \in O(2) \subset Isom(\mathbb{R}^2)$



$\tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y})$

$\tilde{p}$ = συμμετρικό του p ως προς ℓ_θ.

Η K_θ καλείται κατοπτρισμός.

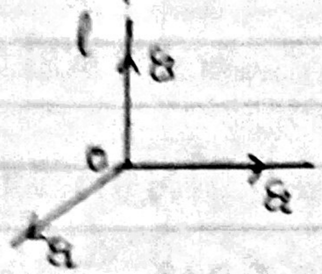
Αντιστροφή προσανατολισμού

$\det K_\theta = -1$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$): Κάθε $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ γράφεται ως $T = T_v \circ A$, όπου A είναι η στροφή ή κατοπτρισμός.

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$: Θεωρώ ένα μονοδιάστατο υπόχωρο ℓ του $\mathbb{R}^3$



Θεωρώ ορθομοναδιαία βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\varepsilon_3 \in \ell$: $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ (δηλ. $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ είναι δεξιόστροφη)

Θεωρώ $\theta \in [0, 2\pi)$ και ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $A_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς τη βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Προφανώς $A_\theta \in O(3) \subset Isom(\mathbb{R}^3)$.

Η A_θ καλείται στροφή κατά γωνία θ ως προς τον υπόχωρο ℓ.

Έστω ℓ μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon_3 \in \ell$ $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \varepsilon_3)$

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$ ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $A_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $A_\theta \in O(3) \subset Isom(\mathbb{R}^3)$

Η A_θ καλείται ψευδοστροφή

ΘΕΩΡΗΜΑ: Καθε $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ γραφεται ως εξής $T = T_v \circ A$, όπου T_v είναι παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^3$ και A είναι στροφή ως προς ή ψευδοστροφή ως προς κάποιο 1-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σχήμα Σ (δηλ. $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, $n=2,3$) καλείται γεωμετρικώς ισότιμο του σχήματος $\tilde{\Sigma}$ ανν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ και $\tilde{\Sigma} = T(\Sigma)$

1) Καθε σχήμα είναι γεωμετρικώς ισότιμο προς τον εαυτό του διότι $Id \in Isom(\mathbb{R}^n)$.

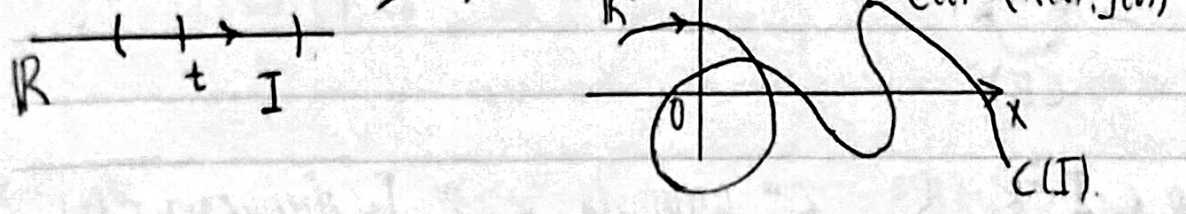
2) Αν Σ είναι γεωμ. ισότιμο με $\tilde{\Sigma}$, τότε και το $\tilde{\Sigma}$ είναι γεωμ. ισότιμο με το Σ $\left(T \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)\right)$

3) Αν Σ γεωμ. του Σ_1 και Σ γεωμ. ισοτ. του $\Sigma_2 \Rightarrow$ το Σ είναι γεωμ. ισότιμο του Σ_2
$(T_1 \in Isom(\mathbb{R}^n), T_2 \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T_1 \circ T_2 \in Isom(\mathbb{R}^n))$
$(Isom(\mathbb{R}^n), \circ)$ ομάδα

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ κάθε απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, όπου I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$, και η οποία είναι C^k, $k \geq 1$.
C^k αν υπάρχει παράγωγος εως k-τάξεως και όλες είναι συνεχείς.

1) Οι καμπύλες είναι απεικονίσεις και όχι σύνολα σημείων.

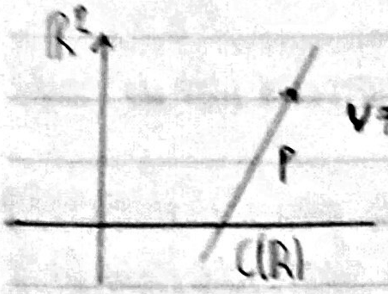


Οι $x(t), y(t)$ καλούνται συναρτήσεις συντεταγμένων
Το σύνολο $C(I)$ καλείται εικόνα της c

Η ανεξάρτητη μεταβλητή t καλείται παράμετρος της c

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

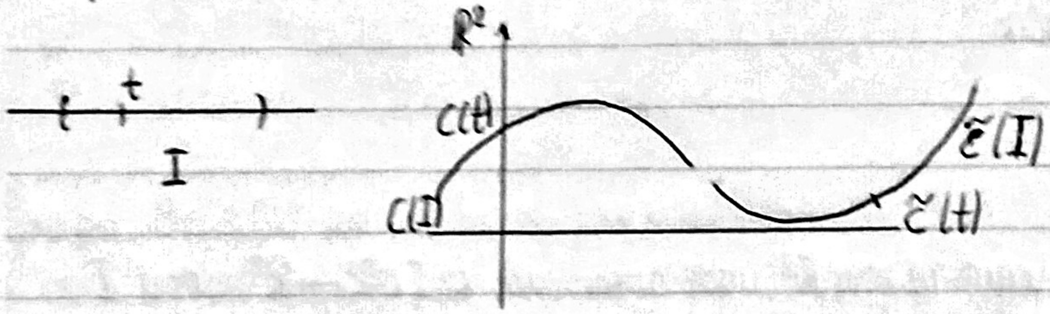
1) Θεωρούμε την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = p + tv$, $v \neq 0$

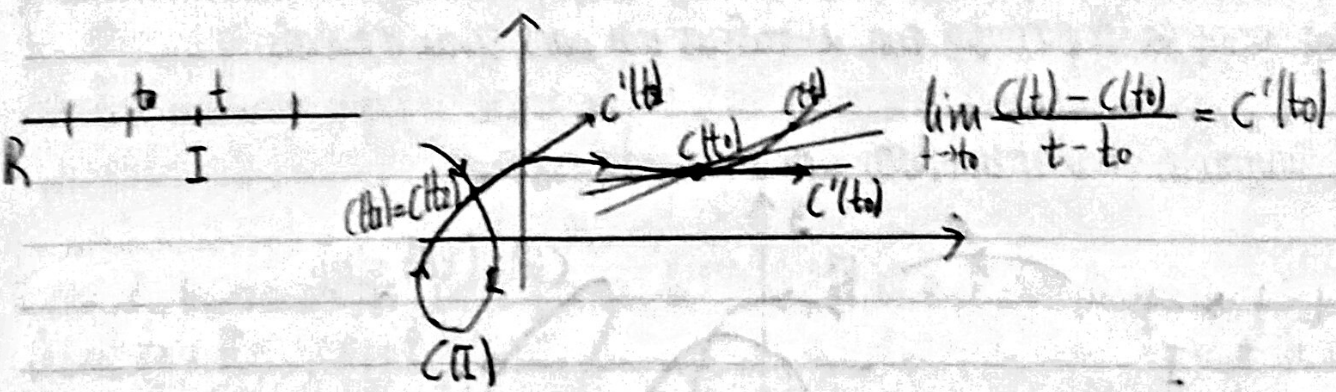


2) $\tilde{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) = p + t^3 v$

Γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμ. ισότιμες αν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$





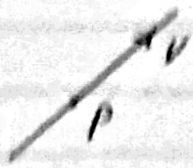
$$\lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} = c'(t_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ C^k καμπύλη $k \geq 2$. Το διάνυσμα $c'(t)$ καλείται **εφαπτομενικό διάνυσμα** (ή διάνυσμα ταχύτητας) της c στο $t \in I$.
Η καμπύλη c καλείται **ΚΑΝΟΝΙΚΗ** αν $c'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$
$\Leftrightarrow \|c'(t)\| \neq 0$, $\forall t \in I$

Εφαπτόμενη ευθεία κανονικής καμπύλης

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $c: I \to \mathbb{R}^2$ είναι κανονική καμπύλη, τότε η εφαπτόμενη ευθεία της c στο $t_0 \in I$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το $c'(t_0)$

1) $c_1(t) = p + tv$, $p \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $c_1'(t) = v \neq 0$ είναι κανονική



2) $c_2(t) = p + t^3 v$, $p \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $c_2'(t) = 3t^2 v$, $c_2'(0) = 0 \Rightarrow$ Η c_2 δεν είναι κανον.

$\rightarrow$ περιοδική, κλειστή

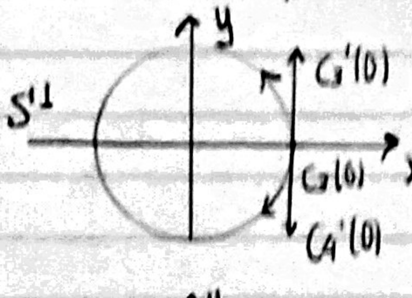
3) $c_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_3(t) = (\cos t, \sin t)$ C^∞

Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $c_3'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Η c_3 είναι κανονική $x^2 + y^2 = 1$, $c(\mathbb{R}) = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

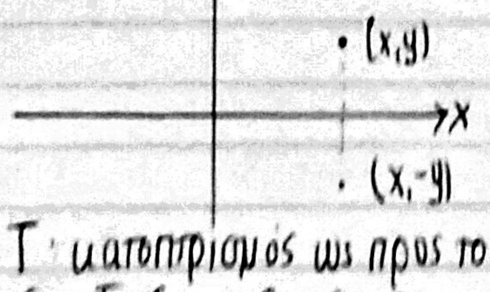
4) $c_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_4(t) = (\cos t, -\sin t)$

Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $c_4'(t) = (-\sin t, -\cos t) \neq (0,0) \Rightarrow c_4$ κανονική με εικόνα $c_4(\mathbb{R}) = S^1$



$c_3'(0) = (0,1)$

$c_4'(0) = (0,-1)$



$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x,-y)$

T: κατοπτρισμός ως προς τον Ox άξονα, άρα $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$

$c_4 = T \circ c_3 \Rightarrow c_3, c_4$ γεωμ. ισότιμες